

## Ricerca di massimi e minimi di funzioni a 2 variabili- esercizi svolti

1. Trovare i massimi e i minimi relativi della funzione

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + (1 + x + y)^3$$

Ricerca dei punti critici:

$$\begin{cases} 3x^2 - 3(1 + x + y)^2 = 0 \\ 3y^2 - 3(1 + x + y)^2 = 0 \end{cases}$$

risolvendo e semplificando si ha:

$$\begin{cases} y^2 + 2xy + 2x + 2y = -1 \\ x^2 + 2xy + 2x + 2y = -1 \end{cases}$$

sottraendo alla prima equazione la seconda si ha:  $y^2 - x^2 = 0$  che ha per soluzioni

$y=x$  e  $y=-x$ .

Si metta,alternativamente a sistema:

$$\begin{cases} y = x \\ 3y^2 + 4y + 1 = 0 \end{cases}$$

con soluzione i punti stazionari  $(-1, -1)$  e  $(-1/3, -1/3)$ .

$$\begin{cases} y = -x \\ -y^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

con soluzione i punti critici  $(1, -1)$  e  $(-1, 1)$ .

L'hessiano generale è:

$$H = \begin{vmatrix} 2y + 2 & 2y + 2x + 2 \\ 2y + 2x + 2 & 2x + 2 \end{vmatrix}$$

E lo si calcola nei punti critici già trovati:

$$H(-1, -1) = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4$$



il punto  $(-1, -1)$  è di sella.

$$H\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \begin{vmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{vmatrix} = \frac{16}{9} - \frac{4}{9} = \frac{4}{3} > 0$$

è un punto di minimo relativo.

$$H(1, -1) = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -4 < 0$$

il punto  $(1, -1)$  è di sella.

$$H(-1, 1) = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0$$

il punto  $(-1, 1)$  è di sella.

(Autore: Santo Calabrese, Docente di Matematica Applicata, Via E. Fermi N.23 t.091.6818107  
email:santocalabrese@libero.it)



2. Determinare i punti stazionari della funzione

$$f(x, y) = x^2 y^2 - \ln y$$

E classificarne la natura.

Ricerca dei punti stazionari:

$$\begin{cases} 2xy^2 - x \ln y = 0 \\ 2yx^2 - \frac{x}{y} = 0 \end{cases}$$

risolvendo la seconda equazione si ha:

$$2x^2 y^2 - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(2y^2 x - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0, \quad x = \frac{1}{2y^2}$$

Si considerino ogni soluzione a sistema con la prima equazione si ha:

$$\begin{cases} x = 0 \\ \ln y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (0, 1)$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2y^2} \\ \ln y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = e \\ x = \frac{1}{2e^2} \end{cases} \Leftrightarrow \left( \frac{1}{2e^2}, e \right)$$

trovati i due punti critici si calcoli l'hessiano generale:

$$H = \begin{vmatrix} 2y^2 & 4xy - \frac{1}{y} \\ 4xy - \frac{1}{y} & 2x^2 + \frac{x}{y^2} \end{vmatrix}$$

Si calcoli l'hessiano nei punti critici trovati:

$$H(0,1) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0 \quad \text{punto di sella.}$$

$$H\left(\frac{1}{2e^2}, e\right) = \begin{vmatrix} 2e^2 & \frac{1}{e} \\ \frac{1}{e} & \frac{1}{e^4} \end{vmatrix} = \frac{2}{e^2} - \frac{1}{e^2} = \frac{1}{e^2} > 0 \quad \text{punto di minimo relativo.}$$

(Autore: Santo Calabrese, Docente di Matematica Applicata, Via E. Fermi N.23 t.091.6818107

email:santocalabrese@libero.it)



3. Determinare gli estremi relativi della funzione:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + x$$

$f(x, y)$  è definita in  $\mathbb{R}^2$

Determiniamo le derivate parziali prime:

$$f'_x(x, y) = 2x + y + 1$$

$$f'_y(x, y) = 2y + x$$

Per trovare gli eventuali punti di max e min poniamo le 2 derivate uguali a zero:

$$\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ 2y + x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -4y + y + 1 = 0 \\ x = -2y \end{cases} \quad \begin{cases} -3y + 1 = 0 \\ x = -2y \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{1}{3} \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

il punto A  $(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$  è un possibile punto ....

$$f''_{xx} = 2 \quad f''_{xy} = 1$$

$$f''_{xy} = 1 \quad f''_{yy} = 2$$

E scriviamo la matrice:

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$$

$$f''_{xx}\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = 2 > 0 \quad A \text{ è un punto di minimo}$$

