

Teorema di De L'Hospital

Siano $y = f(x)$ e $y = g(x)$ due funzioni continue e derivabili in un intervallo A , privato eventualmente del punto x_0 , che può essere un punto interno ad A o un suo estremo (quindi anche $+\infty$ e $-\infty$). Si abbia:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = \infty \text{ e sia } g'(x) \neq 0 \text{ in un intorno di } x_0.$$

Se esiste finito il limite $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ allora esiste finito anche il limite $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ e vale la relazione:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Gli ultimi due teoremi di De L'Hospital sono utili per determinare il limite di un rapporto di funzioni, nel caso si abbia a che fare con forme di indecisione del tipo: " $\frac{0}{0}$ " e " $\frac{\infty}{\infty}$ ".

Esempi

1. Si calcoli con De Hospital il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 5x}{\cos \frac{x}{2}}$$

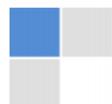
Tale limite è una forma di indecisione " $\frac{0}{0}$ ", ricorrendo al teorema di De l'Hospital si ha:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 5x}{\cos \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{5 \cos 5x}{-\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}} = -10 \frac{\cos 5\pi}{\sin \frac{\pi}{2}} = -10 \frac{\cos \pi}{\sin \frac{\pi}{2}} = 10$$

2. Si calcoli con De Hospital il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{4x}}{x^2 + x + 1}$$

Tale limite è una forma di indecisione del tipo " $\frac{\infty}{\infty}$ ".



Per il secondo teorema di De L'Hospital è:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{4x}}{x^2 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4e^{4x}}{2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{16e^{4x}}{2} = +\infty$$

3. Si calcoli con De Hospital il seguente limite: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0^+$$

4. Si calcoli con De Hospital il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$$

In modo analogo si dimostra che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)

Da ciò si deduce che e^x è un infinito di ordine superiore rispetto a x^α .

5. Dimostrare che Si calcoli con De Hospital il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0^+ \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

$$\text{Infatti } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0^+$$

Quindi anche x^α è un infinito di ordine superiore a $\log x$.

6. Dimostrare che Si calcoli con De Hospital il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\log x}$$

Applichiamo De Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\log x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\frac{1}{x}} = +\infty$$

