Teorema di De L'Hospital

Siano $y = f(x)$ e $y = g(x)$ due funzioni continue e derivabili in un intervallo A, privato eventualmente del punto x_0, che può essere un punto interno ad A o un suo estremo (quindi anche $+\infty$ e ∞). Si abbia:

$$\lim_{x\to x_0}|f(x)| = \lim_{x\to x_0}|g(x)| = \infty \text{ e sia } \text{ e } g'(x) \neq 0 \text{ in un intorno di } x_0 .$$

Se esiste finito il limite $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ **allora** esiste finito anche il limite $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ e vale la relazione:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Gli ultimi due teoremi di De L'Hospital sono utili per determinare il limite di un rapporto di funzioni, nel caso si abbia a che fare con forme di indecisione del tipo: $"\frac{0}{0}"$ e $"\frac{\infty}{\infty}"$.

Esempi

1. Si calcoli con De Hospital il seguente limite:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 5x}{\cos\frac{x}{2}}$$

Tale limite è una forma di indecisione $"\frac{0}{0}"$, ricorrendo al teorema di De l'Hospital si ha:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\text{sen}5x}{\cos\frac{x}{2}} = \lim_{x\to\pi}\frac{5\cos 5x}{-\frac{1}{2}\text{sen}\frac{x}{2}} = -10\frac{\cos 5\pi}{\text{sen}\frac{\pi}{2}} = -10\frac{\cos\pi}{\text{sen}\frac{\pi}{2}} = 10$$

2. Si calcoli con De Hospital il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{4x}}{x^2+x+1}$$

Tale limite è una forma di indecisione del tipo $"\frac{\infty}{\infty}"$.

Per il secondo teorema di De L'Hospital è:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{4x}}{x^2+x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4e^{4x}}{2x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{16e^{4x}}{2}=+\infty$$

3. Si calcoli con De Hospital il seguente limite: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0^+$$

4. Si calcoli con De Hospital il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1}=+\infty$$

In modo analogo si dimostra che $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^\alpha}=+\infty \ (\alpha\in R)$

Da ciò si deduce che e^x **è un infinito di ordine superiore rispetto a** x^α.

5. Dimostrare ch Si calcoli con De Hospital il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x^\alpha}=0^+ \ (\alpha\in R).$$

Infatti $\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x^\alpha}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha x^\alpha}=0^+$

Quindi anche x^α **è un infinito di ordine superiore a** $\log x$.

6. Dimostrare ch Si calcoli con De Hospital il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\log x}$$

Applichiamo De Hospital:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\log x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\frac{1}{x}}=+\infty$$