# Studio di funzioni- esercizi svolti- easy

1. Studiare la funzione

$$y = 9x^3 - 4x$$

**Dominio:** $\mathbb{R}$

**Pari o dispari: simmetria**

$$\left.\begin{array}{l} f(-x) = -9x^3 + 4x \\ -f(x) = -9x^3 + 4x \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \text{ è } dispari$$

*f(x)* è simmetrica rispetto all'origine.

**Intersezione con gli assi:**

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 9x^3 - 4x \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}; \quad O \equiv (0,0)$$

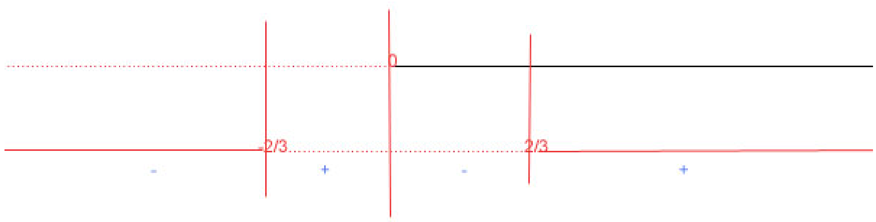
$$\begin{cases} y = 0 \\ y = 9x^3 - 4x \end{cases}; \quad \begin{cases} y = 0 \\ 0 = 9x^3 - 4x \end{cases}; \quad \begin{cases} y = 0 \\ x(9x^2 - 4) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ x = \pm\dfrac{2}{3} \end{cases} \qquad A \equiv \left(0; \frac{2}{3}\right) \quad B \equiv \left(0; -\frac{2}{3}\right)$$

**Segno della funzione:**

$$f(x) > 0$$

$$9x^3 - 4x > 0 \qquad x(9x^2 - 4) > 0 \qquad \left[\begin{array}{c} x > 0 \\ x < -\dfrac{2}{3}, \quad x > \dfrac{2}{3} \end{array}\right.$$




$$f(x) > 0 \quad \forall\, x \in \left(-\frac{2}{3}; 0\right) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right) \qquad f(x) < 0 \quad \forall\, x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(0; \frac{2}{3}\right)$$

## Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to-\infty} 9x^3 - 4x = -\infty$$

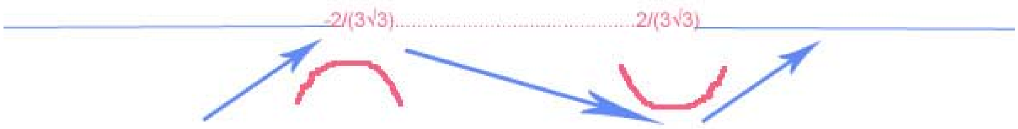
$$\lim_{x\to\infty} 9x^3 - 4x = +\infty$$

## Derivata prima: max e min

$$f'(x) = 27x^2 - 4$$

$$f'(x) \geq 0 \qquad 27x^2 - 4 \geq 0$$

$$x \leq -\frac{2}{3\sqrt{3}} \qquad x \geq \frac{2}{3\sqrt{3}}$$




$$f\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right) = 9\cdot\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^3 - 4\cdot\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right) = 9\cdot\left(\frac{8}{27\left(3\sqrt{3}\right)}\right) - \frac{8}{3\sqrt{3}} = \frac{8}{9\left(3\sqrt{3}\right)} - \frac{8}{3\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{3}}\left(\frac{8-24}{9}\right) = \frac{1}{3\sqrt{3}}\left(\frac{-16}{9}\right) = -\frac{16}{27\sqrt{3}}$$

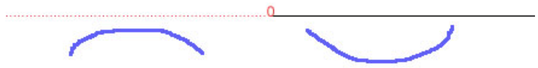
Il minimo è simmetrico del massimo rispetto all’origine, pertanto sarà:

$$Max: \left(\frac{2}{3\sqrt{3}};\ -\frac{16}{27\sqrt{3}}\right) \quad Min: \left(-\frac{2}{3\sqrt{3}};\ +\frac{16}{27\sqrt{3}}\right)$$

## Derivata seconda:

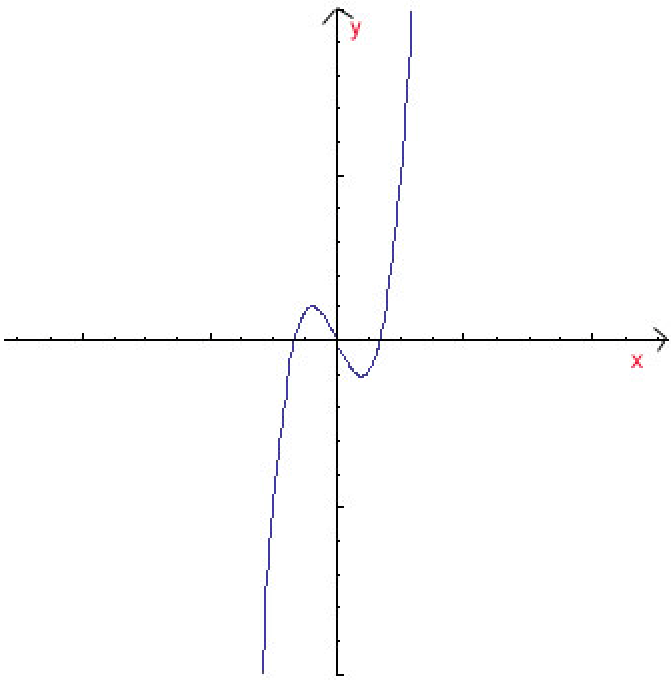
$$f''(x) = 54x$$

$f''(x) \geq 0 \qquad 54x \geq 0 \qquad \rightarrow \qquad x \geq 0$




$F(0,0)$è un flesso.

## Grafico



2. Studiare la funzione:

$$y = x^3 + 8x^2 + 5x - 2$$

**Dominio:** $\mathbb{R}$

**Intersezioni con gli assi cartesiani:**

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} y = 0 \\ 0 = x^3 + 8x^2 + 5x - 2 \quad (1) \end{cases}$$

Scomponiamo il polinomio $x^3 + 8x^2 + 5x - 2$ mediante la regola di Ruffini:

$P(-1) = -1 + 8 - 5 - 2 = 0$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | +8 | +5 | -2 |
| -1 | | -1 | -7 | +2 |
| | 1 | +7 | -2 | 0 |

Il polinomio (1) diviene:

$$(x + 1)(x^2 + 7x - 2) = 0$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 8}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{57}}{2} = \begin{matrix} \dfrac{-7 + \sqrt{57}}{2} \\ \dfrac{-7 - \sqrt{57}}{2} \end{matrix}$$

La curva interseca l'asse $x$ in

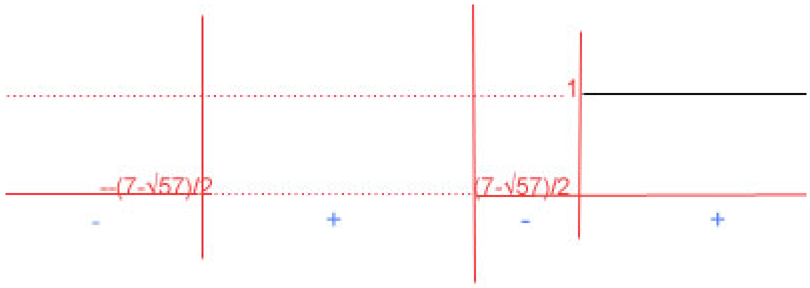
$$A(-1; 0) \quad B\left(\frac{-7 - \sqrt{57}}{2}; 0\right) \quad C\left(\frac{-7 + \sqrt{57}}{2}; 0\right)$$

**Segno della funzione:**

$$f(x) > 0$$

$$(x - 1) \cdot (x^2 + 7x - 2) > 0$$

$$\left[\begin{matrix} (x - 1) > 0 \\ (x^2 + 7x - 2) > 0 \end{matrix}\right. \qquad \left[\begin{matrix} x > 1 \\ x < \dfrac{-7 - \sqrt{57}}{2} \simeq -7{,}27 \qquad x > \dfrac{-7 + \sqrt{57}}{2} \simeq 0{,}27 \end{matrix}\right.$$




$$f(x) > 0 \quad \forall\, x \in \left(-\frac{7-\sqrt{57}}{2};\ \frac{7+\sqrt{57}}{2}\right) \cup (1;\ +\infty)$$

$$f(x) < 0 \quad \forall\, x \in \left(-\infty;\ -\frac{7-\sqrt{57}}{2}\right) \cup \left(-\frac{7+\sqrt{57}}{2};1\right)$$

**Limiti agli estremi del campo di definizione:**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

**Derivata:**

$$f'(x) = 3x^2 + 16x + 5$$

$$f'(x) \geq 0$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{49}}{3} = \frac{-8 \pm 7}{3} = \begin{cases} -5 \\ -\dfrac{1}{3} \end{cases} \qquad\qquad x \leq -5 \quad e \quad x \geq -1/3$$


$$Max\colon (-5; f(-5)) \quad Min\colon \left(-\frac{1}{3}; f\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$$

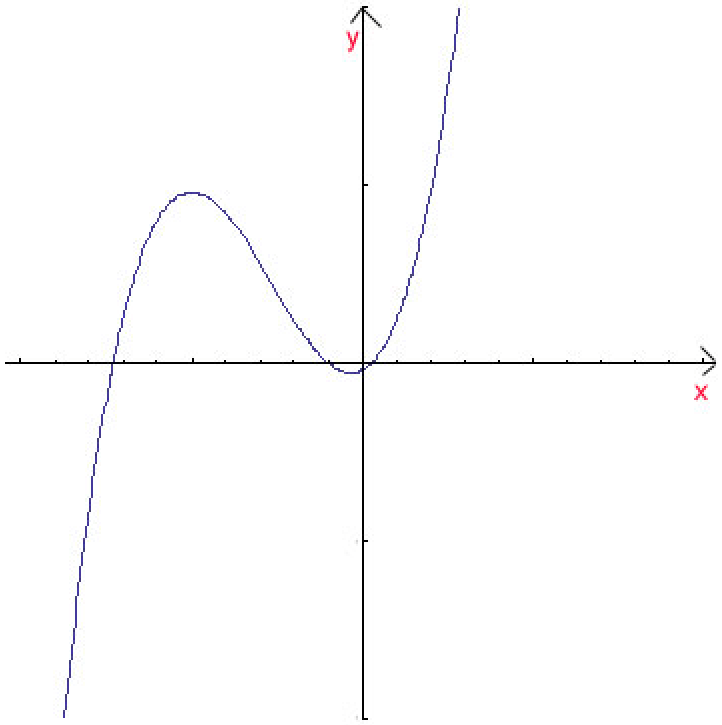
**Derivata seconda- flessi:**

$$f''(x) = 6x + 16$$

$$f''(x) \geq 0 \quad 6x + 16 \geq 0 \quad x \geq -\frac{16}{6}$$


$$F\left(-\frac{16}{6}; f\left(-\frac{16}{6}\right)\right)$$

**Grafico**



3. Studiare la funzione:

$$y = 3x^5 - 5x^3$$

**Dominio.**

essendo una funzione intera il dominio è $\mathbb{R}$

**Intersezione con gli assi cartesiani.**

Intersezione con l'asse delle ordinate:

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 3x^5 - 5x^3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad O\ (0;0)$

Intersezione con l'asse delle ascisse:

$\begin{cases} y = 0 \\ y = 3x^5 - 5x^3 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ 0 = 3x^5 - 5x^3 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x^3(3x^2 - 5) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y = 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^3 = 0 \\ 3x^2 - 5 = 0 \end{array}\right. \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ x = \pm\sqrt{\dfrac{5}{3}} = \pm\dfrac{\sqrt{15}}{3} \end{cases} \quad \rightarrow \ A\left(\dfrac{\sqrt{15}}{3};0\right) \ B\left(-\dfrac{\sqrt{15}}{3};0\right)$

**Simmetria**

$f(-x) = 3(-x)^5 - 5(-x)^3 = -3x^5 + 5x^3$

$-f(x) = -3x^5 + 5x^3$

$f(-x) = -f(x) \ \rightarrow \ f$ è dispari quindi $f$ è simmetrica rispetto all'origine

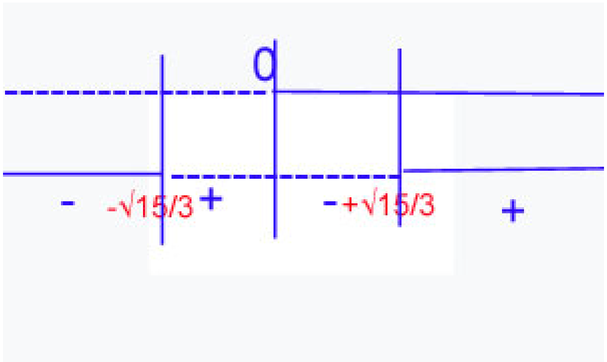
**Segno della funzione**

$f(x) > 0$

$3x^5 - 5x^3 > 0$

$x^3(x^2 - 5) > 0$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x < -\frac{\sqrt{15}}{3} \qquad x > +\frac{\sqrt{15}}{3} \end{cases}$$




$f(x) > 0 \qquad -\frac{\sqrt{15}}{3} < x < 0 \qquad x > \frac{\sqrt{15}}{3}$

$f(x) < 0 \qquad x < -\frac{\sqrt{15}}{3} \qquad 0 < x < +\frac{\sqrt{15}}{3}$

## Limiti agli estremi del campo di definizione

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

## Derivata prima: Max e Min

Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15(x^4 - x^2)$$

Per la ricerca dei massimi e minimi poniamo:

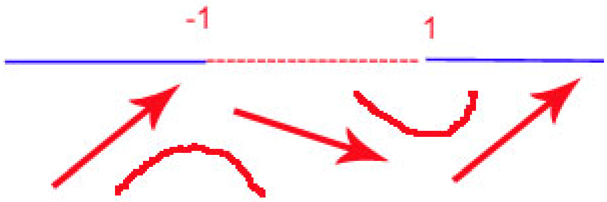
$f'(x) \geq 0$

Nel nostro caso:

$$15x^4 - 15x^2 \geq 0$$

$15x^2(x^2 - 1) \geq 0$

$\begin{cases} x^2 \geq 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \forall\, x \in \mathbb{R} \\ x \leq -1 \qquad x \geq 1 \end{cases}$




x=-1 è un massimo e x=1 è un minimo.
Calcoliamo le loro ordinate, per farlo quindi sostituiamo 1 al posto della x in $f(x) = 3x^5 - 5x^3$:

$$f(-1) = 3(-1)^5 - 5(-1)^3 = 2$$

Poiche la funzione è simmetrica rispetto all'origine il minimo avrà come ordinata -2:

$Max\ (-1;\ +2) \quad Min\ (1;\ -2)$

## Derivata seconda: Flessi

Calcoliamo la derivata seconda:

$$f''(x) = 15(4x^3 - 2x)$$

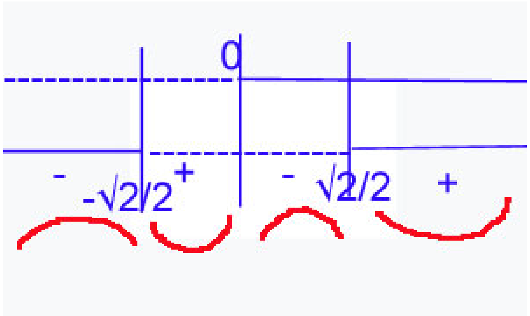
Per la ricerca dei flessi poniamo:

$f''(x) \geq 0$

$4x^3 - 2x \geq 0$

$2x(2x^2 - 1) \geq 0$

$$\left[\begin{array}{l} x \geq 0 \\ x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$




I flessi sono in x=0 x=$+\frac{\sqrt{2}}{2}$ e x=$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Calcoliamo l'ordinata dei flessi:

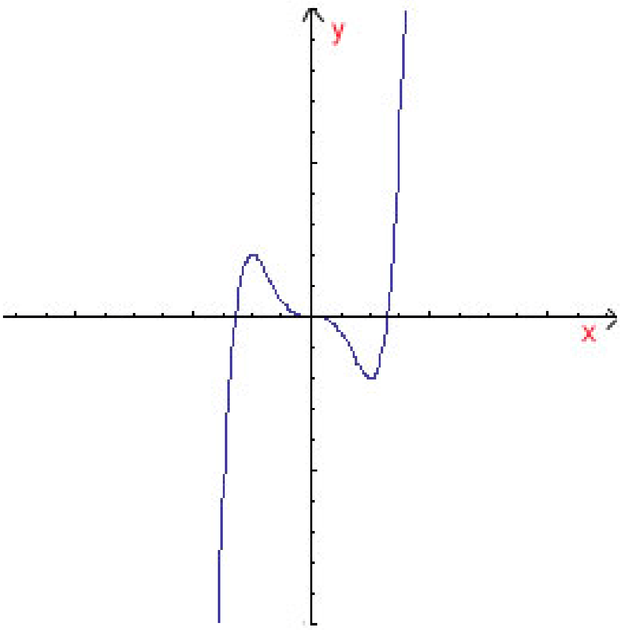
$f(0) = 0$

$F_1(0;0)$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{8} - 5\frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{3\sqrt{2} - 10\sqrt{2}}{8} = \frac{-7\sqrt{2}}{8}$$

Poiche la funzione è simmetrica rispetto all'origine il minimo avrà come ordinata $+\frac{7\sqrt{2}}{8}$ quindi i flessi sono: $F_1(0;0)$; $F_2\left(+\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{7\sqrt{2}}{8}\right)$; $F_3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; +\frac{7\sqrt{2}}{8}\right)$

## Grafico



4. Studiare la funzione:

$$y = \frac{2x^3 - 1}{x^2 + 1}$$

**Dominio**: $\mathbb{R}$

**Intersezione con gli assi:**

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{2x^3 - 1}{x^2 + 1} \end{cases} ; \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \qquad A(0;\ -1)$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = \dfrac{2x^3 - 1}{x^2 + 1} \end{cases} ; \quad \begin{cases} y = 0 \\ 2x^3 - 1 = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} y = 0 \\ x^3 = \dfrac{1}{2} \end{cases} ; \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}} \end{cases} \qquad B\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}; 0\right)$$

**Pari/Dispari**

$$f(-x) = \frac{-2x^3 - 1}{x^2 + 1}$$

$$-f(x) = \frac{-2x^3 - 1}{x^2 + 1}$$

$$f(-x) \neq -f(x) \implies no\ dispari$$

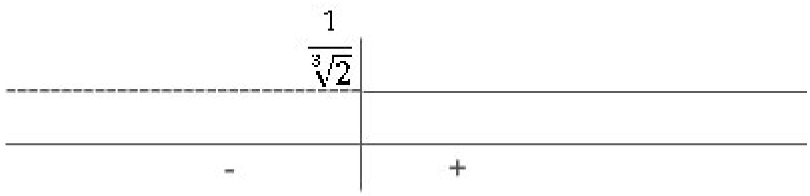
$$-f(x) \neq f(-x) \implies no\ pari$$

**Segno**

$$\frac{2x^3 - 1}{x^2 + 1} > 0 \quad \left[\begin{array}{l} 2x^3 - 1 > 0 \\ x^2 + 1 > 0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x > \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ \forall\ x \in \mathbb{R} \end{array}\right.$$

$$f(x) < 0 \qquad \forall\ x < \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

$$f(x) > 0 \qquad \forall\ x > \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$




## Limiti agli estremi del campo di definizione

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

## Derivata: max e min

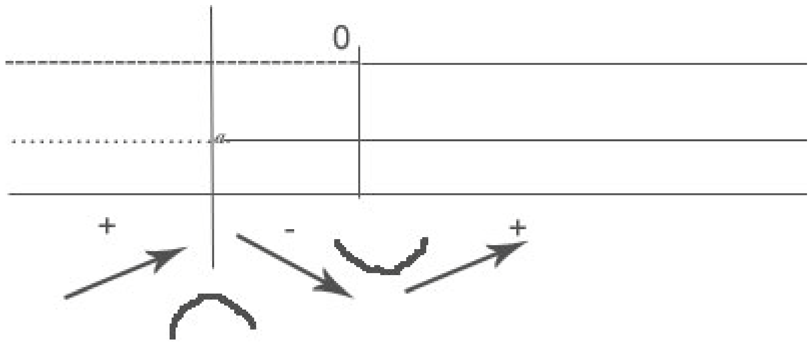
$$f'(x) = \frac{6x^2(x^2+1) - (2x^3-1)(2x)}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{2x[3x(x^2+1) - 2x^3 + 1]}{(x^2+1)^2} = \frac{2x(3x^3+3x-2x^3+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x(x^3+3x+1)}{(x^2+1)^2}$$

Posto $f'(x) \geq 0$

$$\frac{2x(x^3+3x+1)}{(x^2+1)^2} \geq 0 \qquad \left[\begin{array}{l} 2x \geq 0 \\ x^3+3x+1 \geq 0 \\ (x^2+1)^2 > 0 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x \geq 0 \\ x \geq \alpha \quad con\ \alpha \in (-1;0) \\ \forall\, x \in \mathbb{R} \end{array}\right.$$

$$A\ (0;1) \equiv min$$




## Il grafico